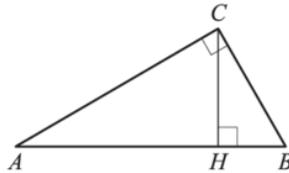


ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

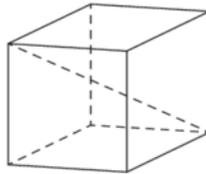
Профильный уровень Вариант № 20

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 13$, $\operatorname{tg}A = 0,2$. Найдите высоту CH .



2. В квадрате $ABCD$ диагональ AC равна $5\sqrt{2}$. Найдите скалярное произведение векторов \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CD} .

3. Диагональ куба равна $\sqrt{6}$. Найдите площадь поверхности куба.



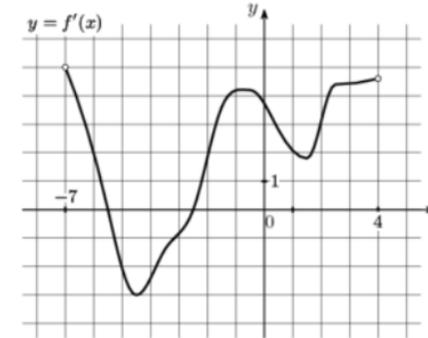
4. В классе 21 учащийся, среди них два друга – Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

6. Найдите корень уравнения $\log_4(5-x) = \log_4(2-x) + 1$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{48} \cos^2 \frac{19\pi}{12} - \sqrt{12}$.

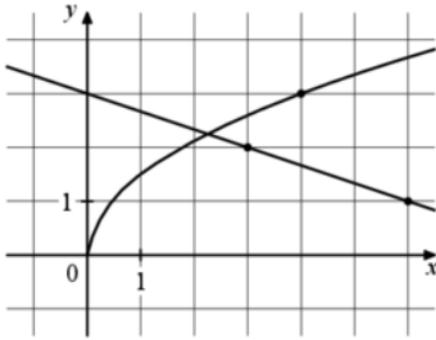
8. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



9. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

10. Смешав 14-процентный и 98-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 70-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 74-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 14-процентного раствора использовали для получения смеси?

11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$. Найдите абсциссу точки пересечения.



12. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}$.

13. а) Решите уравнение $\sin x \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : M D_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

15. Решите неравенство:

$$\frac{x - 2\sqrt{x} - 8}{2^x - 64} \geq 0.$$

16. В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1300 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен полностью. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

17. Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3)\sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19. В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21%.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30%, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов составит доля девочек в классе?